МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА МАРКОВА С ДВУМЯ ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Учебное пособие

Москва, 2023

О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин

Квадратурная формула Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях

(Учебное пособие)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Настоящее учебное пособие является третьим в серии учебных пособий, предназначенных для изучения численно-аналитических методов, построенных на основе ортогональных многочленов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом, третьем, пособии продолжается рассмотрение некоторых важных применений ортогональных многочленов — многочленов Чебышёва — в вычислительной математике, а именно при построении квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов и аппроксимации функций с помощью ортогональных разложений. Оно имеет такую же структуру, как и второе пособие, но в отличие от него здесь рассматривается формула Маркова с двумя наперед заданными узлами — обоими концами отрезка интегрирования, тогда как во втором учебном пособии исследовалась формула Маркова только с одним фиксированным узлом. Можно сказать, что в данных руководствах охвачены различные случаи Маркова для квадратурных формул.

Данное учебное пособие состоит из шести разделов. В первом разделе дается вывод формулы численного интегрирования Маркова для интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Здесь получены выражения для абсцисс и коэффициентов, а также для остаточного члена квадратурной формулы. Во втором разделе приводится формула Маркова для интегралов вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,.$$

В третьем разделе доказывается сходимость процесса численного интегрирования по формулам Маркова.

В четвертом разделе описывается применение формулы Маркова для приближенного вычисления коэффициентов разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода — ряд Чебышёва. В пятом разделе изучаются свойства частичной суммы ряда Чебышёва функции $f(x)$ с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова. Доказано, что частичная сумма одновременно является многочленом наилучшего равномерного приближения этой функции $f(x)$ на множестве, состоящем из конечного числа точек, совпадающих с абсциссами квадратурной формулы Маркова. Установлена зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова.

В шестом разделе приводятся оценки для погрешности приближения функции частичной суммой ее ряда Чебышева, коэффициенты которого определены по формуле численного интегрирования Маркова.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов механико-математического факультета МГУ, однако может быть полезно студентам, аспирантам и научным сотрудникам других факультетов МГУ, интересующимся вопросами численного интегрирования и полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Формула численного интегрирования Маркова для отрезка [0, 1] с двумя фиксированными узлами — концами отрезка $a_1 = 0$**,** $a_2 = 1$ **и весовой функцией** $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b p(x)f(x)dx,$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a,\, b]$ функция, могущая обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, и такая, что интеграл $\int_a^b p(x)|x|^m dx$ имеет конечное значение при $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $f(x)$ — произвольная непрерывная функция. Применим квадратурную формулу, содержащую наперед заданные узлы $a_1, \ldots, a_m$ и имеющую вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) + R(f). \qquad (1)$$

Эта формула содержит параметры A_i, x_i , $i = 1, \ldots, n$, и D_l, $l = 1, \ldots, m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (1) обращался в нуль для всех алгебраических многочленов степени не выше $n + m - 1$ [1]. Для этого достаточно, чтобы эта формула была интерполяционной. Для того чтобы остаточный член $R(f)$ обращался в нуль для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i. В (1) коэффициенты A_i, D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы $R(f)$ обращался в нуль для многочленов возможно более высокой степени.

Нам потребуется следующее определение.

Систему многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ называют *ортогональной* и *нормированной*, коротко, *ортонормированной*, на отрезке $[a,\, b]$ с весом $p(x)$, если выполняются требования:

1) $P_n(x)$ есть многочлен степени n,

2)

$$\int_a^b p(x)P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad m \neq n, \\ 1, & \text{при} \quad m = n. \end{cases}$$

Обозначим

$$\Omega(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_m), \qquad \omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула*

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) \tag{2}$$

была точной для многочленов степени $2n+m-1$, *необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен* $\omega(x)$ *был ортогонален на отрезке* $[a,\, b]$ *с весом* $p(x)\Omega(x)$ *к любому многочлену* $q(x)$ *степни, не превосходящей* $n-1$, *или, иначе говоря, чтобы было выполнено условие*

$$\int_a^b p(x)\Omega(x)\omega(x)q(x)dx = 0.$$

Доказательство теоремы приведено в [1].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ производную порядка $2n+m$, то остаточный член $R(f)$ будет равен [1]:

$$R(f) = \int_a^b p(x)\Omega(x)\omega^2(x)\frac{f^{(2n+m)}(\xi(x))}{(2n+m)!}\,dx, \qquad a < \xi(x) < b. \tag{3}$$

Из теоремы следует, что для того чтобы построить квадратурную формулу (1) (или (2)) при любом n, надо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a,\, b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$.

Чтобы весовая функция, участвующая в нашем исследовании, $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$ сохраняла знак, мы предположим, что $\Omega(x)$ также сохраняет знак на $[a,\, b]$ и, следовательно, ни один из фиксированных узлов a_l не лежит внутри $(a,\, b)$. Тогда, ввиду знакопостоянства $\rho(x)$ на $[a,\, b]$, многочлен $\omega(x)$, ортогональный по весу $\rho(x)$ на $[a,\, b]$ ко всякому многочлену степени, не превосходящей $n-1$, существует при всяком n [1]. Если, кроме того, не допускать квадратурных формул с узлами, лежащими вне $[a,\, b]$, мы ограничимся рассмотрением следующего случая.

Рассмотрим квадратурную формулу (1) частного вида, а именно: формулу численного интегрирования А.А. Маркова.

Случай, когда единственным фиксированным узлом является левый конец интервала интегрирования, т.е. $m = 1$, $a_1 = a$, исследован в работе [8]. Теперь обсудим вариант квадратурной формулы с двумя фиксированными узлами, в качестве которых возьмем концы интервала интегрирования, т.е. $m = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = b$. Тогда формула (1) запишется в виде

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)dx = D_1 f(a) + D_2 f(b) + \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R(f). \tag{4}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n+1$. Многочлен $\omega(x)$ будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[a,\, b]$ с весом $\rho(x) = (x-a)(x-b)p(x)$. Ввиду знакопостоянства этой весовой функции, такая система многочленов, как мы уже говорили, существует [1]. Обозначим через $\Pi_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, данную систему многочленов. Для определенности будем считать их нормированными. Пусть α_n — старший коэффициент многочлена

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots .$$

Тогда коэффициенты A_i вычисляются при помощи равенств, основанных на тождестве Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов (см. (9.2.10) в [1]):

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi_n'(x_i)\Pi_{n+1}(x_i)(x_i-a)(x_i-b)} = \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}\Pi_n'(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)(x_i-a)(x_i-b)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты D_1 и D_2 имеют следующие значения, определяемые равенствами, справедливыми для интерполяционных квадратурных формул (см. (9.2.11) в [1]):

$$D_1 = \frac{1}{\Pi_n(a)(a-b)} \int\limits_a^b p(x)\Pi_n(x)(x-b)dx. \tag{6}$$

$$D_2 = \frac{1}{\Pi_n(b)(b-a)} \int\limits_a^b p(x)\Pi_n(x)(x-a)dx. \tag{7}$$

Предположим, что

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{8}$$

и отрезок $[a,\, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Квадратурная формула Маркова (4) примет вид

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = D_1 f(0) + D_2 f(1) + \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R(f). \tag{9}$$

Построим систему многочленов, ортогональную на отрезке $[0,1]$ с весом

$$\rho(x) = p(x)x(x-1) = -\sqrt{x(1-x)}\,. \tag{10}$$

1.1. Система многочленов, ортогональная на отрезке $[0,1]$ с весом $-\sqrt{x(1-x)}$. Воспользуемся известным преобразованием ортогональной системы многочленов при умножении веса на многочлен (см. гл. 9, § 1 в [1]). Будем рассматривать многочлены со старшим коэффициентом, равным единице. Чтобы отличить их от нормированных многочленов, обозначим их $\tilde{\Pi}_s(x)$ или $\tilde{P}_s(x)$. Если $\tilde{P}_s(x)$, $s = 0, 1, \ldots$, — система многочленов, ортогональных на $[a,\, b]$ по весу $p(x)$, то многочлены $\tilde{\Pi}_s(x)$, ортогональные на $[a,\, b]$ по весу $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$, выражаются следующим образом через $\tilde{P}_s(x)$:

$$\tilde{\Pi}_n(x) = \frac{1}{\Delta\Omega(x)} \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+2}(x) & \tilde{P}_{n+2}(a) & \tilde{P}_{n+2}(b) \\ \tilde{P}_{n+1}(x) & \tilde{P}_{n+1}(a) & \tilde{P}_{n+1}(b) \\ \tilde{P}_{n}(x) & \tilde{P}_{n}(a) & \tilde{P}_{n}(b) \end{vmatrix} = \frac{D_{n+2}(x)}{\Delta\Omega(x)}\,,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+1}(a) & \tilde{P}_{n+1}(b) \\ \tilde{P}_{n}(a) & \tilde{P}_{n}(b) \end{vmatrix}\,.$$

Систему многочленов, ортогональную на $[0,1]$ с весом (8), образуют смещенные многочлены Чебышёва первого рода $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$. В нашем случае, т.е. для веса (8) и отрезка $[a,\, b] = [0,\, 1]$, выписанный выше определитель $D_{n+2}(x)$ будет равен

$$\begin{aligned} D_{n+2}(x) = \frac{1}{2^{6n+3}} \big[& T_{n+2}^*(x)T_{n+1}^*(0)T_n^*(1) + T_{n+2}^*(0)T_{n+1}^*(1)T_n^*(x) + \\ & + T_{n+1}^*(x)T_n^*(0)T_{n+2}^*(1) - T_{n+2}^*(1)T_{n+1}^*(0)T_n^*(x) - \\ & - T_{n+2}^*(0)T_{n+1}^*(x)T_n^*(1) - T_n^*(0)T_{n+1}^*(1)T_{n+2}^*(x)\big] = \\ & = \frac{-2(-1)^n[T_{n+2}^*(x) - T_n^*(x)]}{2^{6n+3}}\,, \end{aligned}$$

а определитель

$$\Delta = \frac{1}{2^{4n}}\left[T_{n+1}^*(0)T_n^*(1) - T_{n+1}^*(1)T_n^*(0)\right] = \frac{-2(-1)^n}{2^{4n}}\,.$$

Окончательно получаем выражение для многочлена $\tilde{\Pi}_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице:

$$\tilde{\Pi}_n(x) = \frac{D_{n+2}(x)}{\Delta\Omega(x)} = \frac{T_{n+2}^*(x) - T_n^*(x)}{2^{2n}8x(x-1)} = \frac{U_n^*(x)}{2^{2n}}\,.$$

Здесь $U_n^*(x)$ — смещенные многочлены Чебышёва второго рода, определяемые формулой

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1), \qquad x \in [0,1], \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где $U_n(y)$ — многочлены Чебышёва второго рода, которые при $y \in (-1,\, 1)$ могут быть записаны через тригонометрические и обратные им функции в следующем виде:

$$U_n(y) = \frac{\sin\bigl((n+1)\arccos y\bigr)}{\sin(\arccos y)} = \frac{\sin\bigl((n+1)\arccos y\bigr)}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad y = 2x-1. \tag{12}$$

Старший коэффициент многочлена $U_n(y)$ равен 2^n, а старший коэффициент смещенного многочлена $U_n^*(x) - 2^{2n}$

Таким образом, доказано, что ортогональные многочлены $\tilde{\Pi}_n(x)$ с точностью до числового множителя $\dfrac{1}{2^{2n}}$ совпадают со смещенными многочленами Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$, которые являются ортогональными на отрезке $[0,1]$ с весом $\sqrt{x(1-x)}$ (см., например, § 5, теорему 5.2 на стр. 53 в [2]). При выводе выражения для $\tilde{\Pi}_n(x)$ использовано представление смещенных многочленов Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ через смещенные многочлены Чебышёва первого рода $T_{n+2}^*(x)$ и $T_n^*(x)$ (см. формулу (10) в § 2 в [2]):

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1) = \frac{T_{n+2}(2x-1) - T_n(2x-1)}{2\bigl[(2x-1)^2 - 1\bigr]} = \frac{T_{n+2}^*(x) - T_n^*(x)}{8x(x-1)}.$$

Многочлены, ортонормированные по весу $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$ (10), будем искать в виде

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K_n U_n^*(x),$$

где K_n — некоторая постоянная, отличная от нуля. Определим K_n из условия нормированности многочлена $\Pi_n(x)$, т.е. из условия

$$\int_0^1 \rho(x)\bigl[\Pi_n(x)\bigr]^2 dx = 1.$$

Подставляя выражение для $\Pi_n(x)$, получаем

$$-\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\bigl[(-1)^n K_n\bigr]^2 \bigl[U_n^*(x)\bigr]^2 dx = -K_n^2 \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\bigl[U_n^*(x)\bigr]^2 dx =$$
$$= -K_n^2 \cdot \frac{\pi}{8} = 1.$$

Отсюда

$$K_n^2 = -\frac{8}{\pi}\,, \qquad K_n = \sqrt{-\frac{8}{\pi}}\,.$$

Так как K_n от n не зависит, то индекс n у K_n писать не будем. Получаем окончательное выражение ортонормированного многочлена

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K U_n^*(x) = c_n U_n^*(x), \tag{13}$$

где

$$c_n = (-1)^n K.$$

Замечание. Коэффициенты у нормированного по весу (10) многочлена $\Pi_n(x)$ мнимые.

Используя знак комплексного сопряжения, условие нормированности многочлена $\Pi_n(x)$ можно представить так:

$$\int\limits_0^1 \rho(x)\big[\Pi_n(x)\big]^2 dx = \int\limits_0^1 p(x)\Omega(x)\Pi_n(x)\big(-\bar{\Pi}_n(x)\big)dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \big(-\Omega(x)\big)p(x)\Pi_n(x)\bar{\Pi}_n(x)dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\Pi_n(x)\bar{\Pi}_n(x)dx = 1.$$

Последний интеграл в выписанной цепочке равенств есть квадрат нормы, определяемой скалярным произведением с неотрицательным весом, вводимым по правилу

$$(f, g) = \int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,f(x)\bar{g}(x)dx,$$

в гильбертовом пространстве $L_2\big(0,\,1;\sqrt{x(1-x)}\big)$, в основу которого положено пространство комплексных функций — комплексное векторное пространство.

1.2. Абсциссы формулы Маркова. Узлами x_i формулы Маркова (9) являются корни многочлена $\omega(x) = \tilde{\Pi}_n(x)$. Многочлен $\tilde{\Pi}_n(x)$ отличается от многочлена $U_n^*(x)$ только числовым множителем. Из тригонометрического представления (12) ортогонального многочлена $U_n(y)$ имеем, что нули многочлена Чебышёва второго рода $U_n(y)$ равны

$$y_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}\,, \qquad i = 1, 2, \,\ldots\,, n. \tag{14}$$

Отсюда следует, что корни многочлена $\tilde{\Pi}_n(x)$ (т.е. корни смещенного многочлена Чебышёва $U_n^*(x)$), а значит, и абсциссы x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, квадратурной формулы Маркова (9) будут такими:

$$x_i = \frac{1 + y_i}{2} = \frac{1 + \cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{15}$$

1.3. Коэффициенты формулы Маркова. Коэффициент D_1 квадратурной формулы Маркова (9) определяем по формуле (6). Интеграл в (6) вычислим с помощью правила замены переменной $x = \dfrac{1+y}{2}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{-1}{U_n^*(0)} \int\limits_0^1 \frac{(x-1)U_n^*(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{U_n^*(0)} \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\, U_n^*(x)dx = \\ &= \frac{1}{2U_n(-1)} \int\limits_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\, U_n(y)dy = \frac{1}{2U_n(-1)} \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+y}\, U_n(y)dy. \end{aligned} \tag{16}$$

Интеграл в (16) содержит ортогональный многочлен Чебышёва второго рода. Для его вычисления воспользуемся формулой 22.13.4 из [3]

$$V.p. \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}\, U_{n-1}(y)dy}{y-x} = -\pi T_n(x). \tag{17}$$

Здесь $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва первого рода. Положим в (17) $x = -1$ и заменим n на $n+1$; учитывая равенства для значений многочленов Чебышёва первого и второго рода

$$U_n(-1) = (-1)^n(n+1), \qquad T_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(1), \qquad T_{n+1}(1) = 1,$$

которые вытекают из формул (18), (19), (14), (16) при $m = 0$, приведенных в теореме 4.4 из § 4 на стр. 48 в [2], находим

$$D_1 = \frac{(-1)^n(-\pi)(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{18}$$

Коэффициент D_2 определяем по формуле (7):

$$D_2 = \frac{1}{U_n^*(1)} \int\limits_0^1 \frac{xU_n^*(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{U_n^*(1)} \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, U_n^*(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2U_n(1)} \int\limits_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, U_n(y)dy = \frac{1}{2U_n(1)} \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y}\, U_n(y)dy =$$

$$= \frac{-1}{2U_n(1)} \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-1}\, U_n(y)dy.$$

Для вычисления последнего интеграла снова применим формулу (17). Положим в (17) $x = 1$ и заменим n на $n+1$; учитывая равенство для значений многочленов Чебышёва

$$U_n(1) = n + 1$$

(см. формулу (18) в теореме 4.4 из § 4 на стр. 48 в [2]), окончательно находим

$$D_2 = \frac{\pi}{2(n+1)}\,. \tag{19}$$

Теперь перейдем к определению коэффициентов A_i формулы (9). Возможны два способа их нахождения. Первый способ заключается в их вычислении непосредственно по формулам (5). Для этого определим старшие коэффициенты ортонормированных многочленов $\Pi_n(x)$ (13), входящих в формулу (5). Старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ равен

$$\alpha_n = (-1)^n K 2^{2n}.$$

Старший коэффициент многочлена $\Pi_{n-1}(x)$ равен

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} K 2^{2(n-1)} = (-1)^{n-1} K 2^{2n-2}.$$

Отсюда находим отношение старших коэффициентов многочленов двух смежных номеров ортонормированной системы

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = -4.$$

Из тригонометрического представления (12) ортогонального многочлена $U_n(y)$ с учетом (14), (15) имеем:

$$U_{n-1}^*(x_i) = U_{n-1}(2x_i - 1) = U_{n-1}(y_i) = \frac{\sin(n \arccos y_i)}{\sqrt{1-y_i^2}} = \frac{\sin \dfrac{i\pi n}{n+1}}{\sin \dfrac{i\pi}{n+1}}\,,$$

$$\left[U_n^*(x)\right]' = \left[U_n(2x-1)\right]' = 2U_n'(y), \qquad y = 2x-1,$$

$$\left[U_n^*(x_i)\right]' =$$

$$= 2\,\frac{-\cos\left[(n+1)\arccos y_i\right]\cdot(n+1) - \sin\left[(n+1)\arccos y_i\right]\cdot\dfrac{-y_i}{\sqrt{1-y_i^2}}}{1-y_i^2} =$$

$$= \frac{-2(n+1)\cos i\pi}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}} = \frac{-2(-1)^i(n+1)}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}}\,.$$

Находим значение ортонормированного многочлена из (13)

$$\Pi_{n-1}(x_i) = c_{n-1}U_{n-1}^*(x_i) = c_{n-1}\,\frac{\sin\dfrac{i\pi n}{n+1}}{\sin\dfrac{i\pi}{n+1}}$$

и производную ортонормированного многочлена

$$\Pi_n'(x_i) = \frac{-2(-1)^i(n+1)c_n}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}}\,.$$

Объединяя полученные выражения, вычисляем произведение, входящее в формулу (5):

$$\Pi_n'(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)x_i(x_i-1) =$$

$$= -2\,\frac{(-1)^i(n+1)c_n}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}}\cdot\frac{\sin\dfrac{i\pi n}{n+1}c_{n-1}}{\sin\dfrac{i\pi}{n+1}}\cdot\frac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{i\pi}{n+1}-1}{2} =$$

$$= \frac{(-1)^i(n+1)c_n(-1)^{i+1}\sin\dfrac{i\pi}{n+1}c_{n-1}}{2\sin\dfrac{i\pi}{n+1}} = \frac{-(n+1)c_nc_{n-1}}{2} = \frac{K^2(n+1)}{2} =$$

$$= -\frac{8}{\pi}\cdot\frac{n+1}{2} = -\frac{4(n+1)}{\pi}\,.$$

По формуле (5) окончательно находим A_i:

$$A_i = \frac{-4}{-\dfrac{4(n+1)}{\pi}} = \frac{\pi}{n+1}\,.$$

Итак, доказано, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (9) равны между собой.

Мы рассмотрели первый способ определения коэффициентов A_i. Однако можно поступить другим способом. Для этого обратимся к квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности (формуле типа Гаусса)

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A'_i f(x_i), \tag{20}$$

верной для многочленов степени $2n-1$. Для коэффициентов A'_i имеют место следующие представления, основанные на тождестве Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов:

$$A'_i = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P'_n(x_i) P_{n+1}(x_i)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P'_n(x_i) P_{n-1}(x_i)} \tag{21}$$

(см., напрмер, гл. 7, § 1, формулы (7.1.4), (7.1.5) в [1]), где

$$P_n(x) = a_n x^n + \ \dots\ , \qquad n = 1, 2, \ \dots\ ,$$

— многочлены, ортонормированные на отрезке $[a,\, b]$ с весом $\rho(x)$, x_i — корни ортогонального многочлена $P_n(x)$, лежащие внутри интервала $(a,\, b)$. Предположим, что весовая функция $\rho(x)$ в (20) получается умножением веса $p(x)$ из (1) на многочлен $\Omega(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} (x - a_i)$:

$$\rho(x) = p(x)\Omega(x) = p(x) \prod_{i=1}^{m} (x - a_i).$$

В этом случае ортонормированные многочлены $P_n(x)$ в (21) совпадают с ортонормированными многочленами $\Pi_n(x)$ в (5), а формулы (5) и (21) для коэффициентов A_i и A'_i отличаются друг от друга только множителем $\dfrac{1}{\Omega(x_i)} = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m} (x_i - a_j)}$, а именно:

$$A_i = A'_i \cdot \frac{1}{\Omega(x_i)}\,. \tag{22}$$

В нашем случае (т.е. при $m = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$)

$$\Omega(x) = x(x-1).$$

Рассмотрим квадратурную формулу типа Гаусса с неотрицательным весом

$$\tau(x) = -\rho(x) = -p(x)\Omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, x(1-x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

Эта формула имеет вид

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) dx = \frac{\pi}{4(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n+1}\, f\left(\frac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\right) + R(f).$$

Она следует, например, из формулы (7.3.7), приведенной в гл. 7, § 3 на стр. 132 в [1], с помощью замены переменной $x = \dfrac{1+y}{2}$, переводящей отрезок $[-1,\,1]$ в отрезок $[0,1]$ ($y \in [-1,\,1]$, $x \in [0,1]$). Таким образом, в формуле (20) коэффициенты A_i' равны

$$A_i' = -\frac{\pi}{4(n+1)} \sin^2 \frac{i\pi}{n+1}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Вычислим множитель $\dfrac{1}{\Omega(x_i)}$ в (22):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega(x_i)} = \frac{1}{x_i(x_i-1)} &= \frac{1}{\dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\left(\dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2} - 1\right)} = \\ &= \frac{4}{\cos^2\dfrac{i\pi}{n+1} - 1} = -\frac{4}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Из (22), (23), (24) получаем окончательное выражение для коэффициентов A_i квадратурной формулы Маркова (9):

$$A_i = \frac{\pi}{n+1}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Итак, мы доказали, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (9) равны между собой.

1.4. Остаточный член формулы Маркова. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n+2$, то остаточный член $R(f)$ формулы

(9), согласно (3) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,x(x-1)\omega^2(x)dx = \\ =-\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\omega^2(x)dx, \qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{26}$$

Напомним, что многочлен $\omega(x)$ степени n принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[0,1]$ с весом $\sqrt{x(1-x)}$. Многочлен $\omega(x)$ отличается от смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ (11), (12) только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента $U_n^*(x)$, а именно:

$$\omega(x)=\frac{1}{2^{2n}}\,U_n^*(x).$$

Согласно теореме 5.2. из главы I, § 5 в [2], смещенный многочлен Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ имеет норму, равную

$$\left(\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}[U_n^*(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

Поэтому из (26) получаем

$$R(f)=-\frac{\pi}{2^{4n+3}}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,,\qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{27}$$

Теперь мы можем собрать вместе все полученные выше выражения для абсцисс (15), коэффициентов (18), (19), (25) и остаточного члена (27) квадратурной формулы. Таким образом, квадратурная формула Маркова (9) для отрезка $[0,1]$ с двумя фиксированными узлами $a_1=0$ и $a_2=1$ и весовой функцией (8)

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

имеет вид

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{\pi}{2(n+1)}\,[f(0)+f(1)]+\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)-\frac{\pi}{2^{4n+3}}\,\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,, \\ 0\leqslant\eta\leqslant 1,$$

или, с использованием обозначения

$$\sum_{j=l}^{m}{}'' a_j = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \ \ldots \ + a_{m-1} + \frac{1}{2}\, a_m, \qquad m > l, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}\, \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{29}$$

Абсциссы квадратуры (29) вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_0 &= 0, \\ x_i &= \dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\,, \quad i = 1, 2, \ \ldots \ , n, \\ x_{n+1} &= 1. \end{cases} \tag{30}$$

Узлы x_i, $i = 1, 2, \ \ldots \ , n$ являются нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ (11), (12) степени n

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1).$$

Алгебраическая степень точности формулы (29) равна $2n+1$.

2. Формула численного интегрирования Маркова для интегралов вида $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$**.** Приведем отрезок $[a,\, b]$ к отрезку $[0, 1]$ линейным преобразованием

$$x = (b-a)\alpha + a, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{31}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}\,.$$

При преобразовании (31) функция

$$h(x) = \frac{b-a}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{32}$$

преобразуется в функцию

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,.$$

Найдем интеграл, используя правило замены переменной (31):

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int\limits_0^1 \frac{f[(b-a)\alpha + a]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha.$$

Вычисляя интеграл по отрезку $[0,1]$ от функции $\varphi(\alpha) = f[(b-a)\alpha + a]$ переменной α с помощью (29) и применяя для определения остаточного члена $R(\varphi)$ правило дифференцирования сложной функции

$$\varphi^{(2n+2)}(\alpha) = (b-a)^{2n+2} f^{(2n+2)}[(b-a)\alpha + a],$$

получаем квадратурную формулу Маркова следующего вида:

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}(b-a)^{2n+2}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \qquad a \leqslant \eta \leqslant b, \tag{33}$$

Абсциссы квадратуры (33) есть:

$$x_0 = a, \tag{34}$$

$$x_i = (b-a)\alpha_i + a, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35}$$

$$\alpha_i = \frac{1 + \cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{36}$$

$$x_{n+1} = b. \tag{37}$$

Символ $\sum''$ определен формулой (28). Для весовой функции (32) квадратурная формула будет иметь вид:

$$\int\limits_a^b \frac{(b-a)f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{\pi(b-a)}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}(b-a)^{2n+3}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \qquad a \leqslant \eta \leqslant b.$$

3. Сходимость процесса численного интегрирования по формулам Маркова. Обозначим $Q_n(f)$ квадратурную сумму в (33):

$$Q_n(f) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f\big(x_i^{(n)}\big),$$

где $x_i^{(n)} = x_i$ (x_i определены по формулам (34)—(37)), а через $I(f)$ — интеграл в (33):

$$I(f) = \int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \,.$$

Докажем, что *для любой непрерывной на* $[a,\, b]$ *функции* $f(x)$ *квадратурный процесс по формулам Маркова*

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f), \qquad n = 1, 2, \, \dots \,, \tag{38}$$

сходится, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f).$$

Доказательство. Во-первых, поскольку квадратурная формула Маркова является интерполяционной, то квадратурный процесс (38) является интерполяционно-квадратурным. Для интерполяционно-квадратурных процессов сходимость имеет место всегда, когда $f(x)$ — любой многочлен. Во-вторых, все коэффициенты квадратурной формулы Маркова (33) положительны и их сумма от n не зависит. Поэтому выполнены все условия теоремы В.А.Стеклова о сходимости последовательности квадратурных формул. Утверждение доказано.

Для удобства читателя приведем без доказательства теорему В.А.Стеклова о сходимости последовательности квадратурных формул общего вида

$$I(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f),$$

на которую мы ссылались в данном разделе при доказательстве сходимости квадратурного процесса по формулам Маркова.

Теорема. *Пусть отрезок* $[a,\, b]$ *конечен и* $p(x)$ *— интегрируемая на* $[a,\, b]$ *функция. Для того чтобы для любой непрерывной на* $[a,\, b]$ *функции* $f(x)$ *имело место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f), \tag{39}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) *предельное соотношение* (39) *имеет место для любого многочлена* (*т.е., когда* $f(x)$ *— любой многочлен*);

2) *существует такое число* M, *что для любого* n *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}| \leqslant M$$

(см., например, гл. 3, § 7, стр. 279 – 284 в [4], или гл. 12, § 3, теоремы 8, 9, 10, стр. 257 - 259 в [1], или гл. 2, § 6, теорему 5 на стр. 173 в [5], или § 5 в [6]).

4. Приближенное вычисление коэффициентов смещенного ряда Чебышёва по формуле численного интегрирования Маркова. Рассмотрим действительную функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[0,1]$ и квадрат которой интегрируем на $[0,1]$ с весом (8)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Используя обычное обозначение для такого функционального пространства $L_2\big(0,1;p(x)\big)$, можно записать

$$f(x) \in L_2\Big(0,1;\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)\,.$$

Для функции $f(x) \in L_2\Big(0,1;\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)$ образуем ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$ [2, 7]

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \tag{40}$$

где символ $\sum{}'$ определен формулой

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \,\ldots\, + a_m, \qquad m \geqslant l. \tag{41}$$

Коэффициенты ряда определяются с помощью выражения

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, f(x) T_i^*(x) dx, \qquad i = 0, 1, \,\ldots\,. \tag{42}$$

Ряд (40) называется также *смещенным рядом Чебышёва* функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывную производную порядка $2n+2$. При наших предположениях смещенные ряды Чебышёва являются равномерно сходящимися на $[0,1]$ рядами. Подробнее с условиями равномерной сходимости этих рядов можно ознакомиться в учебном пособии [7].

Применим квадратурную формулу Маркова (29) с узлами (30) для вычисления интеграла (42), принимая в качестве подынтегральной функции выражение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(x_j)T_i^*(x_j) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}\,\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\right],$$
$$0 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

или

$$a_i^* = \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(x_j)T_i^*(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \qquad i=0,1,\,\ldots\,, \tag{43}$$

где

$$R(f\cdot T_i^*) = -\frac{1}{2^{4n+2}}\,\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,, \qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{44}$$

Абсциссы, входящие в (43), есть

$$x_0 = 0, \tag{45}$$

$$x_j = \frac{1+\cos\dfrac{j\pi}{n+1}}{2}\,, \qquad j=1,2,\,\ldots\,,n. \tag{46}$$

$$x_{n+1} = 1. \tag{47}$$

Значения смещенного многочлена Чебышёва в (43) равны:

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \tag{48}$$

$$T_i^*(x_j) = T_i(2x_j-1) = \cos\frac{ij\pi}{n+1}\,, \qquad j=1,2,\,\ldots\,,n, \tag{49}$$

$$T_i^*(1) = T_i(1) = 1. \tag{50}$$

Подставим (48), (49), (50) в (43):

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{(-1)^i}{n+1}f(0) + \frac{1}{n+1}f(1) +$$
$$+\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{ij\pi}{n+1}f(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \qquad i=0,1,\,\ldots\,.$$

Отбрасывая остаточный член $R(f \cdot T_i^*)$, получаем приближенное значение коэффициента смещенного ряда Чебышёва

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \approx \frac{(-1)^i}{n+1}f(0) + \frac{1}{n+1}f(1) + \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{ij\pi}{n+1}f(x_j),$$
$$i = 0, 1, \ldots . \tag{51}$$

Формула (51) будет давать точное значение коэффициента Чебышёва a_i^* функции $f(x)$, если $f(x)$ является многочленом степени не выше $2n+1-i$.

Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени k. Ряд Чебышёва многочлена степени k тождественно совпадает со своей k-й частичной суммой, и многочлен $f(x)$ будет равен этой частичной сумме:

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^* \cdot T_i^*(x). \tag{52}$$

Здесь $a_k^* \cdot T_k^*(x)$ — член ряда Чебышёва с максимальным номером, содержащийся в частичной сумме (52), a_k^* — коэффициент Чебышёва с максимальным номером, входящий в частичную сумму. При вычислении a_k^* под знаком интеграла в (51) будет многочлен $f(x)T_k^*(x)$ степени $2k$. Для того чтобы коэффициент a_k^* вычислялся точно по квадратурной формуле (51), необходимо, чтобы алгебраическая степень точности квадратуры (51) была не менее $2k$, т.е.

$$2n+1 \geqslant 2k, \qquad n \geqslant k - \frac{1}{2}, \qquad n \geqslant k.$$

Поэтому число нефиксированных узлов квадратурной формулы (51) должно быть не менее степени многочлена $f(x)$ или, другими словами, не менее максимального номера коэффициента Чебышёва.

5. Частичная сумма смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по формуле Маркова. Рассмотрим k-ую частичную сумму смещенного ряда Чебышёва (40) функции $f(x)$

$$S_k(x, f) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \qquad k > 0 \tag{53}$$

(символ ${\sum}'$ определен формулой (41)). Известно (см., например, гл. I, § 5, теорему 5.3 в [2]), что эта сумма является для функции $f(x)$ многочленом степени k

наилучшего среднеквадратичного приближения на отрезке $[0, 1]$, т.е. многочленом наилучшего приближения в пространстве $L_2\Big(0, 1, ; \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)$. Так будет, если в (53) использовать точные значения коэффициентов Чебышёва. Здесь мы обсудим свойства частичной суммы (53), когда точные значения коэффициентов a_i^* не даны и мы вынуждены прибегнуть к их приближенным значениям.

Пусть коэффициенты a_i^* вычислены по квадратурной формуле Маркова (43) или (51) с двумя фиксированными узлами — концами отрезка $[0, 1]$ и числом n нефиксированных узлов, равным номеру частичной суммы ряда k. Подставляя квадратурную сумму (43) при $n = k$ в (53) и опуская остаточный член, получим многочлен степени k

$$L_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' f(x_j) T_i^*(x_j)\Big)\, T_i^*(x), \tag{54}$$

где

$$x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{j\pi}{k+1}}{2}\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{55}$$

Выражения (45), (47) для узлов формулы Маркова, совпадающих с концами отрезка $[0, 1]$, и выражение (46) при $n = k$ для нефиксированных узлов мы объединили в одну формулу (55). В ней все узлы перенумерованы в порядке убывания. Напомним, что x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нулями смещенного многочлена Чебышёва $U_k^*(x)$ второго рода (11) степени k, а числа

$$u_{k,j} = 2x_j - 1 = \cos\frac{j\pi}{k+1}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

являются нулями обычного многочлена Чебышёва U_k второго рода (12) (см., например, формулу (14) в п. 1.2.). В узлах x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, (55) смещенный многочлен Чебышёва $T_{k+1}^*(x)$ достигает своих экстремальных на отрезке $[0, 1]$ значений (см. фигурирующие ниже равенства (58)).

Формула численного интегрирования Маркова (29), которую мы использовали для вычисления коэффициентов Чебышёва $a_i^*[f]$, является интерполяционной. В частности, коэффициенты этой формулы выражаются через интегралы от произведения весовой функции и лагранжевых коэффициентов — фундаментальных многочленов интерполирования (см., например, (6),(7)). Лагранжевы коэффициенты входят в представление интерполяционного многочлена $J_{k+1}^*(x)$ степени $k + 1$, приближающего подынтегральную функцию $f(x)$ из (29) по узлам (55), вместе с выделенными в качестве множителей значениями интерполируемой подынтегральной функции в узлах (55). Эти интегралы с помощью известного тождества Кристоффеля-Дарбу для ортогональных многочленов преобразуются к более удобному для вычисления виду (5). Существуют и другие представления интерполяционного многочлена, которые будут весьма полезны в наших дальнейших исследованиях, к которым мы сейчас переходим.

5.1. Построение полинома наилучшего равномерного приближения функции на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$. Для более подробного изучения частичной суммы (54) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ нам понадобится другой вид интерполяционного многочлена $J_{k+1}^*(x)$ степени $k+1$ с узлами интерполирования x_j, определяемыми по (55). Для такого многочлена справедливо следующее представление, которое вытекает из формулы (77), приведенной в гл. I, § 7, в теореме 7.11 на стр. 94 в [2]:

$$J_{k+1}^*(x) = J_{k+1}(2x-1) = \frac{2}{k+1}\, x(x-1)U_k^*(x)\sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j)\frac{1}{x-x_j}\,. \qquad (56)$$

Поскольку старший коэффициент многочлена $U_k^*(x)$ равен 2^{2k}, то коэффициент при x^{k+1} в $J_{k+1}^*(x)$ есть

$$\frac{2^{2k+1}}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Так как $T_{k+1}^*(x) = 2^{2k+1}x^{k+1} + \ldots$, то разность двух многочленов с одинаковыми старшими членами

$$K_k^*(x) = J_{k+1}^*(x) - \left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j)\right) T_{k+1}^*(x) \qquad (57)$$

является многочленом степени не выше k. Вспомним, что в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, (55) смещенный многочлен Чебышёва первого рода $T_{k+1}^*(x)$ достигает своих экстремальных на отрезке $[0,1]$ значений (см. формулы (48)–(50) при $i = k+1$, $n = k$):

$$T_{k+1}^*(x_m) = T_{k+1}(2x_m - 1) = T_{k+1}\left(\cos\frac{m\pi}{k+1}\right) = T_{k+1}(u_{k,m}) = (-1)^m \qquad (58)$$

(см. также гл. I, § 4, теорему 4.2, формулу (6) на стр. 46 в [2]). Отсюда следует, что значения многочлена $K_k^*(x)$ в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, равны

$$K_k^*(x_m) = f(x_m) - (-1)^m \cdot \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Поэтому разность $f(x) - K_k^*(x)$ в узлах x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$, принимает поочередно значения $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Иными словами, многочлен $K_k^*(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$f(x_m) - K_k^*(x_m) = (-1)^m \varepsilon, \qquad m = 0, 1, \dots, k+1.$$

Отсюда следует, что $K_k^*(x)$ является многочленом наилучшего равномерного приближения степени k для функции $f(x)$ на множестве узлов x_m, $m = 0, 1, \dots, k+1$, и что $|\varepsilon|$ представляет собой погрешность наилучшего приближения функции $f(x)$ многочленом $K_k^*(x)$ на этом множесте узлов (см. гл. I, § 6, теорему 6.2. в [2], являющуюся следствием *основной теоремы Чебышёва* об альтернансе).

5.2. Связь частичной суммы ряда Чебышёва функции с наилучшим равномерным приближением этой функции на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$. Установим связь частичной суммы $L_k(x)$ (54) ряда Чебышёва с многочленом наилучшего равномерного приближения $K_k^*(x)$.

Теорема 1. *Пусть все коэффициенты k-й частичной суммы* (53) *смещенного ряда Чебышёва* (40) *функции $f(x)$ вычислены по одной и той же квадратурной формуле Маркова* (43) *с двумя фиксированными узлами — концами отрезка* $[0, 1]$ *и числом нефиксированных узлов, равным номеру частичной суммы ряда $n = k$; пусть многочлен $L_k(x)$ представляет полученную таким образом частичную сумму* (54)*. Тогда $L_k(x)$ является многочленом степени k наилучшего* (*равномерного*) *приближения функции $f(x)$ на множестве узлов x_j, $j = 0, 1, \dots, k+1$, определенных формулой* (55)*, т.е. на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$.*

Доказательство. Представим многочлен $K_k^*(x)$ (57) другой, равносильной, формулой. Для этого воспользуемся вторым видом многочлена $J_{k+1}^*(x)$ (56), который следует из формулы (78) в уже упомянутой теореме 7.11 из главы I, § 7 в [2]:

$$J_{k+1}^*(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1}{}'' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x). \tag{59}$$

Этот вид показывает, что полином $J_{k+1}^*(x)$ разложен по системе многочленов $T_i^*(x)$, $i = 0, 1, \dots, k+1$, ортогональных на точечном множестве x_m,

$m = 0, 1, \ldots, k+1$, (55) в смысле скалярного произведения

$$(T_i^*, T_l^*) = \sum_{m=0}^{k+1}{}'' T_i^*(x_m) T_l^*(x_m),$$

при этом использованы коэффициенты Фурье полинома $J_{k+1}^*(x)$ относительно этой системы ортогональных на $\{x_m\}$ многочленов

$$b_i^* = \frac{1}{\|T_i^*\|^2} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Об ортогональности многочленов Чебышёва на конечном множестве точек (55) см., например, гл. I, § 5, теорему 5.7. в [2]. Из (59) и общей теоремы о среднеквадратичном приближении алгебраическими многочленами в дискретном случае следует, что многочлен $J_{k+1}^*(x)$ является многочленом наилучшего дискретного среднеквадратичного приближения функции $f(x)$, заданной на дискретном множестве точек x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$ (55).

Подставим (59) в равенство (57)

$$K_k^*(x) = J_{k+1}^*(x) - \varepsilon T_{k+1}^*(x)$$

и получим

$$K_k^*(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1}{}'' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x) - \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j) \right) T_{k+1}^*(x). \tag{60}$$

Учитывая равенства

$$T_{k+1}^*(x_j) = T_{k+1}(2x_j - 1) = T_{k+1}(u_{k,j}) = (-1)^j,$$

которые вытекают из (58) при $m = j$, вторую сумму (вычитаемое) в (60) можно записать так:

$$\frac{1}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_{k+1}^*(x_j) \right) T_{k+1}^*(x). \tag{61}$$

Выражение (61) совпадает с i-ым слагаемым, указанным под знаком первой суммы с двумя штрихами в (60) и взятым при $i = k+1$. Это приводит к окончательному виду для многочлена $K_k^*(x)$:

$$K_k^*(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k}{}' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j) \right) T_i^*(x). \tag{62}$$

Сопостовляя правые части (54) и (62), мы приходим к равенству

$$L_k(x) = K_k^*(x). \tag{63}$$

Напомним, что число нефиксированных узлов в квадратурной формуле Маркова, с помощью которой вычисляются коэффициенты частичной суммы (53) смещенного ряда Чебышёва, равно номеру частичной суммы ряда k.

Таким образом, доказано, что частичная сумма $L_k(x)$ (54) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова (43) или (51) с двумя фиксированными узлами — концами отрезка $[0, 1]$ и числом нефиксированных узлов, равным номеру k частичной суммы ряда, является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения этой функции на множестве узлов x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, (55), т.е. на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$.

Замена переменной по формуле $x = \dfrac{1+y}{2}$ преобразует многочлен $K_k^*(x)$ переменной x на отрезке $[0, 1]$ в многочлен $K_k(y) = K_k^*\Big(\dfrac{1+y}{2}\Big)$ переменной y на отрезке $[-1,\ 1]$, который является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения функции $f\Big(\dfrac{1+y}{2}\Big)$ на множестве узлов $\{y_j = 2x_j - 1,\ j = 0, 1, \ldots, k+1\}$, заключенных на $[-1,\ 1]$. Для достаточно регулярной функции f многочлен K_k близок многочлену наилучшего приближения на всем отрезке $[-1,\ 1]$ (см. § 7, стр. 100 в [2]).

5.3. Зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова. Формула (54) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $L_k(x)$:

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' f(x_j) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{64}$$

Установим зависимость коэффициентов Чебышёва $a_i^*[L_k]$ полинома $L_k(x)$ (54) наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ от коэффициентов Чебышёва самой функции.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ разложена в ряд Чебышёва*

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[f] T_i^*(x), \tag{65}$$

многочлен $L_k(x)$ наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на мно-

жестве узлов (55) *записан по формуле*

$$L_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[L_k] T_i^*(x),$$

где $a_i^*[L_k]$ *определены в* (64), *то*

$$a_i^*[L_k] = a_i^*[f] + \sum_{q=1}^{\infty} \bigl(a_{2q(k+1)-i}^*[f] + a_{2q(k+1)+i}^*[f]\bigr), \qquad 0 < i \leqslant k,$$

$$a_0^*[L_k] = a_0^*[f] + 2\sum_{q=1}^{\infty} a_{2q(k+1)}^*[f].$$

Доказательство. Подставим в (64) разложение функции $f(x)$ в смещенный ряд Чебышёва (65)

$$f(x) = {\sum_{l=0}^{\infty}}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x).$$

Получим

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}{}'' \Bigl({\sum_{l=0}^{\infty}}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x_j) \Bigr) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поменяем местами порядок суммирования:

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1} {\sum_{l=0}^{\infty}}{}' a_l^*[f] {\sum_{j=0}^{k+1}}{}'' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{66}$$

Вычислим внутреннюю сумму с двумя штрихами в (66). Для этого рассмотрим интегралы

$$\int\limits_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx, \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \qquad r = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Так как $r + i \leqslant 2k + 1$, то в квадратурной формуле Маркова (29) при $n = k$ и $f(x) = T_r^*(x) T_i^*(x)$ остаточный член обращается в нуль, т.е.

$$\int\limits_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \frac{\pi}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}{}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j); \tag{67}$$

абсциссы в (67) x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, определены по (55). В силу ортогональности смещенных многочленов Чебышёва

$$(T_i^*, T_j^*) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} T_i^*(x) T_j^*(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$(T_i^*, T_i^*) = \|T_i^*\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases}$$

(см., например, § 5, теорему 5.2. на стр. 53 в [2]) левая часть (67), а следовательно, и правая часть (67) будут равны

$$\frac{\pi}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ \pi & \text{при} \quad r = i = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ 2 & \text{при} \quad r = i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases} \tag{68}$$

Далее получим простое соотношение между значениями многочленов Чебышёва первого рода в точках x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, (55).

Рассмотрим

$$T_l^*(x_j) = T_l(2x_j - 1) = T_l\Big(\cos\frac{j\pi}{k+1}\Big) = \cos\frac{lj\pi}{k+1}\,.$$

Пусть $l = 2q(k+1) \pm r$, где q и r — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда

$$T_l^*(x_j) = \cos\frac{\big[2q(k+1) \pm r\big] j\pi}{k+1} = \cos\Big(2qj\pi \pm \frac{rj\pi}{k+1}\Big) = \cos\frac{rj\pi}{k+1}\,. \tag{69}$$

Косинус в правой части (69) равен $T_r^*(x_j)$. Таким образом, для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T^*_{2q(k+1) \pm r}(x_j) = T_r^*(x_j). \tag{70}$$

Для каждого $l \geqslant 0$ сушествуют такие целые числа $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant r < 2(k+1)$, что

$$l = 2q(k+1) + r. \tag{71}$$

Если $0 \leqslant r \leqslant k+1$, то положим $l = 2q(k+1)+r$. Если $k+1<r$, то преобразуем (71) следующим образом:

$$l = \left[2q(k+1)+2(k+1)\right] - 2(k+1) + r = 2(q+1)(k+1) - \left[2(k+1)-r\right].$$

Обозначим $r_1 = 2(k+1)-r$. Тогда $0 < r_1 \leqslant k$ и $l = 2(q+1)(k+1) - r_1$. Таким образом, для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $\bar{q} \geqslant 0$ и $-k \leqslant \bar{r} \leqslant k+1$, что

$$l = 2\bar{q}(k+1) + \bar{r}, \tag{72}$$

где

$$\bar{q} = \begin{cases} q, & \text{если} \quad r \leqslant k+1, \\ q+1, & \text{если} \quad r > k+1, \end{cases} \qquad \bar{r} = \begin{cases} r, & \text{если} \quad r \leqslant k+1, \\ -r_1 = -[2(k+1)-r], & \text{если} \quad r > k+1. \end{cases}$$

Из (70), (72) следует соотношение между значениями многочленов Чебышёва первого рода в точках (55)

$$T_l^*(x_j) = T_{2\bar{q}(k+1)+\bar{r}}^*(x_j) = T_{|\bar{r}|}^*(x_j). \tag{73}$$

Вернемся теперь к формуле (66) для коэффициента Чебышёва $a_i^*[L_k]$. Ввиду (68) для фиксированного $0 < i \leqslant k$ внутренняя сумма в (66) отлична от нуля только при

$$l = i, \quad 2(k+1)-i, \quad 2(k+1)+i, \quad 4(k+1)-i, \quad 4(k+1)+i, \quad \dots,$$

т.е. при

$$l = i, \quad 2k+2-i, \quad 2k+2+i, \quad 4k+4-i, \quad 4k+4+i, \quad \dots .$$

Из (66), (73), (68) вытекает, что

$$a_i^*[L_k] = a_i^*[f] + a_{2k+2-i}^*[f] + a_{2k+2+i}^*[f] + a_{4k+4-i}^*[f] + a_{4k+4+i}^*[f] + \dots . \tag{74}$$

В частности, при $i = k$

$$a_k^*[L_k] = a_k^*[f] + a_{k+2}^*[f] + a_{3k+2}^*[f] + a_{3k+4}^*[f] + a_{5k+4}^*[f] + \dots . \tag{75}$$

Ввиду (68) для $i = 0$ внутренняя сумма в правой части (66) отлична от нуля только при

$$l = 0, \quad 2(k+1), \quad 4(k+1), \quad 6(k+1), \quad 8(k+1), \quad \dots .$$

Из (66), (73), (68) получаем

$$a_0^*[L_k] = a_0^*[f] + 2a_{2k+2}^*[f] + 2a_{4k+4}^*[f] + 2a_{6k+6}^*[f] + 2a_{8k+8}^*[f] + \quad \dots . \tag{76}$$

Теорема доказана.

На основании формул (74), (75), (76) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент

$$a_i^*[L_k] \approx a_i^*[f]$$

и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; при $i = k-1,\ k-2,\ \dots, 2, 1$ эта погрешность меньше; наименьшую погрешность имеет коэффициент $a_0^*[L_k]$.

6. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышёва. Выразим коэффициенты Чебышёва, входящие в k -ую частичную сумму ряда

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) + r_k(x,f),$$

по квадратурной формуле Маркова (43) с остаточным членом (44) при $n = k$. С учетом обозначений, принятых в (54), (64), имеем

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' \big(a_i^*[L_k] + R_i\big) T_i^*(x) + r_k(x,f) = L_k(x) + \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x,f), \tag{77}$$

где

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[L_k] \cdot T_i^*(x),$$

$$\begin{aligned} R_i = R(f \cdot T_i^*) &= -\frac{1}{2^{4k+2}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2k+2)}(\eta)}{(2k+2)!} = \\ &= -\frac{1}{2^{4k+2}(2k+2)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+2}^{l} \cdot f^{(2k+2-l)}(\eta) \cdot T_i^{*(l)}(\eta). \end{aligned} \tag{78}$$

Отсюда

$$f(x) - L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x,f). \tag{79}$$

Формула (79) показывает, что погрешность аппроксимации функции частичной суммой ряда Чебышёва складывается из остаточного члена ряда и ошибок из-за неточностей в приближенных значениях его коэффициентов, входящих в частичную сумму.

Вычислительные приемы, изложенные в данном пособии, рассматриваются нами в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приведем пример использования соотношения (79) при аппроксимации дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_o, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X.$$

Мы предполагаем, что правая часть дифференциального уравнения имеет в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, y' непрерывные ограниченные частные производные по аргументам x, y, y' до порядка $2k+2$ включительно. Тогда функция $F(x) = f\bigl(x, y(x), y'(x)\bigr)$ имеет непрерывную ограниченную производную порядка $2k+2$ на $[x_0,\, x_0+X]$ и для $p+1 \leqslant 2k+2$

$$\|F^{(p+1)}(x)\| \leqslant M_{p+1}, \qquad x \in [x_0, x_0+X].$$

Мы обсуждаем решение задачи Коши на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$, $h \leqslant X$. На этом сегменте правую часть уравнения, взятую на решении задачи, рассмотрим как функцию переменной α:

$$F(x) = f\bigl(x, y(x), y'(x)\bigr) = F(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad \alpha \in [0,1]. \tag{80}$$

Для функции $\Phi(\alpha)$ на $[0,1]$ имеем

$$\Phi^{(p+1)}(\alpha) = h^{p+1} F^{(p+1)}(x)$$

и

$$\|\Phi^{(p+1)}(\alpha)\| \leqslant h^{p+1} M_{p+1}.$$

Разложим $\Phi(\alpha)$ в смещенный ряд Чебышёва и аппроксимируем $\Phi(\alpha)$ k -ой частичной суммой ряда. Тогда формула (77) для функции $\Phi(\alpha)$ примет вид

$$\Phi(\alpha) = L_k(\alpha) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{81}$$

Так как $\Phi(\alpha)$ имеет непрерывные ограниченные производные до порядка $2k+2$, то, как следует из (78), при $h \to 0$ $R_i = R(\Phi \cdot T_i^*) = O(h^{2k+2-i})$; в частности, $R_k = O(h^{k+2})$. Поэтому второе слагаемое в (81) имеет порядок $O(h^{k+2})$ при $h \to 0$, т.е.

$$\left\| {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) \right\|_\infty = O(h^{k+2}). \tag{82}$$

Из (81) имеем

$$\|\Phi(\alpha) - L_k(\alpha)\| \leqslant \left\| {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) \right\| + \|r_k(\alpha, \Phi)\|. \tag{83}$$

Нам потребуются оценки остаточного члена $r_k(\alpha, \Phi)$ ряда Чебышёва для функции $\Phi(\alpha)$. Достаточно подробный вывод этих оценок приведен в учебном пособии [8], к которому мы отсылаем читателя. Здесь же мы ограничимся конечным результатом и приведем их окончательный вид. В одну из них входит верхняя граница $h^{p+1}M_{p+1}$ производной от Φ некоторого порядка $p+1$. При $k > p$ для k -ого остатка ряда справедливо следующее неравенство:

$$\|r_k(\alpha, \Phi)\|_\infty = \max_{\alpha \in [0,1]} |r_k(\alpha, \Phi)| = \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |r_k(x, F)| \leqslant \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}}\, h^{p+1}, \tag{84}$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k (см. формулу (161) в [8]).

Еще одна оценка остаточного члена ряда Чебышёва, которая следует из теории интерполирования, имеет такой вид:

$$\max_{\alpha \in [0,1]} |r_k(\alpha, \Phi)| = \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |r_k(x, F)| \leqslant \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1}, \tag{85}$$

где $\max\limits_{x \in [x_0, x_0+h]} |F^{(k+1)}(x)| \leqslant M_{k+1}$, $c_1 = \mathrm{const}$ (см. формулу (162) в [8]).

Из (82), (83), (85) следует оценка погрешности аппроксимации функции $\Phi(\alpha)$ (80) частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова, а именно:

$$\|\Phi(\alpha) - L_k(\alpha)\|_\infty \leqslant \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1} + O(h^{k+2}).$$

Используя (84) вместо (85), приходим к неравенству

$$\|\Phi(\alpha) - L_k(\alpha)\|_\infty \leqslant \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}}\, h^{p+1} + O(h^{k+2}), \quad k > p. \tag{86}$$

Из (86) видно, что чем более гладкая функция (т.е. чем больше она имеет непрерывных производных), тем быстрее стремится к нулю погрешность аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
2. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
3. *С*правочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1998.
6. *Владимиров В.С., Маркуш И.И.* Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. М.: Наука, 1981.
7. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Основы применения рядов Чебышёва при построении численно-аналитических методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Учебное пособие). М.: НИВЦ МГУ, 2022.
8. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Квадратурные формулы Маркова и их применение в ортогональных разложениях (Учебное пособие). М.: НИВЦ МГУ, 2022.